Université Sdi Mohamed Ben Abdellah
École Nationale des science Appliquées
Fes

Année 2019-2020
Filiére : CP1
S2

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, Département
de Génie électrique et informatique.
École Nationale des Sciences Appliquées, B.P 72, Fés, Morocco
www.ensaf.ac.ma

ABERQI AHMED
Cours d'Analyse II. CP1
filiére : CP1

Cours de mathématiques première année, ANALYSE 2

Analyse II

Cours d'Analyse II. CP1

Ahmed Aberqi

Université sidi mohamed ben abdellah, École nationale des sciences appliquées

DE FES

8 mai 2020

1

1. Cours d'analyse II prof. A.Aberqi

TABLE DES MATIÈRES

Table des matière **2**

Introduction **4**

1 Intégrale de Riemann **5**

1 Introduction 5

2 Intégrale d'une fonction en escalier 6

3 Fonctions intégrables au sens de Riemann 7

3.1 Exemples des fonctions R-intégrables 8

4 Probpriétés de L'intégrale de Riemann 11

4.1 Formule de la moyenne 13

4.2 Somme de Riemann pour les fonctions continues 14

5 Primitives 15

5.1 Primitives des fonctions usuelles 17

5.2 Pratique du calcul intégarl 18

5.2.1 Changement de variable 18

5.2.2 Intégartion par parties 22

5.3 Téchniques de calcules : 24

5.3.1 Primitivs des fractions rationnelles : 24

5.3.2 Primitivs d'un polynôme en sin et cos : 26
5.3.3 Primitives des fonctions rationnelles en $e^{\alpha x}$ 27

2 Intégrales généralisées 28

1 Intégrale généralisée 28
2 Critères de convergence pour les fonctions positives 33
3 Calcul pratique des intégrales généralisées 36
3.1 Utilisation d'une primitive 36
3.2 Intégration par parties 36
4 Intégrale généralisée d'une fonction de signe quelconque 38
4.1 Convergence absolue 38

3 Equations différentielles linéaires 42

1 Introduction 42
2 Equations différentielles linéaires du premiers ordre. 43
2.1 Equations différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur un intervalle . . . 45
2.2 Recherche d'une solution particulière : 46
2.2.1 Méthode de la variation de la constante : 46
2.3 Quelques classes des équations différentielles 49
2.3.1 Equations différentielles à variables séparées 49
2.3.2 Equations homogènes : 49
2.3.3 Equation de BERNOULLI 50
2.3.4 Equation de RICCATTI 51
3 Equations différentielles de 2nd ordre à coéfficients constants 52
3.1 Résolution de l'équation sans second membre 52
3.2 Résolution de l'équation avec second membre 53

Bibliographie 57

INTRODUCTION

[2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Cours d'analyse II prof. A.Aberqi

CHAPITRE 1

INTÉGRALE DE RIEMANN

[1]

1 Introduction

La théorie de l'intégration est issue de la nécessité pratique de calculr des aires et des volumes, elle est liée à la notion trés générale de mesure, et part du principe que l(intégrale d'une fonction constante sur un ensemble est égale au produit de cette constane par la mesure de cet ensemble. Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'intégrale d'une fonction définie sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

1. Cours d'analyse II prof. A.Aberqi

2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2.1

Soit a et b des réels, $a \leq b$·

On appelle subdivision de $[a,b]$ toute famille finie $\delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de $[a,b]$ tels que $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Dans ce cas on note $h_n = max_{0\leq k\leq n-1}|x_{k+1} - x_k|$, et on l'appelle le pas de la subdivision δ

Exemples 2.1.

1. Prenons le cas de $I = [0,1]$.

$x_0 = 0 < x_1 = \dfrac{1}{2} < x_2 = 1$ *est une subdivision de* I *et il est claire que son pas est egale a* $\delta = \frac{1}{2}$

$x_0 = 0 < x_1 = \dfrac{1}{3} < x_2 = \dfrac{1}{2} < x_3 = \dfrac{3}{4} < x_4 = 1$ *est une autre subdivision du même intérvale* I *mais cette fois le pas est egale a* $\delta = \frac{1}{3}$.

2. Dans le cas ou $I = [a,b]$, *on peut considérer la subdivision uniforme suivante :* $x_0 = a < x_1 = a + \cdot\frac{b-a}{n} < x_2 = a + 2\cdot\frac{b-a}{n} < x_3 = a + 3\cdot\frac{b-a}{n} \ldots\ldots < x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n} < \ldots < x_n = b$ *c'est une subdivision uniforme de* I *dont le pas* $h_n = h = \frac{1}{n}$

Définition 2.2: Fonction en escalier

Soit $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dit que ϕ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, s'il existe une subdivision $\delta = (x_0 = a < x_1 < \ldots\ldots < x_n = b)$ de $[a,b]$ avec :

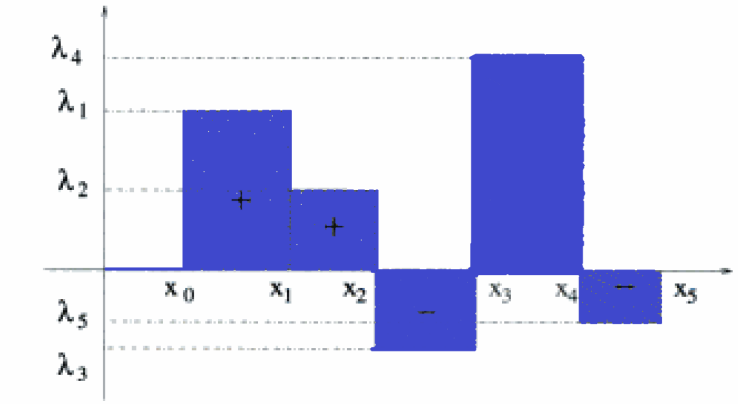
$$\varphi/]x_{i-1}, x_i[= c_i = \text{constante}$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$

Proposition 2.1: et définition

Soit $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a,b]$, le nombre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1})$ avec $\lambda_i = \phi/]x_{i-1}, x_i[$ est indépendant du choix de la subdivision adaptée δ. Il s'appelle l'intégrale de ϕ sur $[a,b]$, on le note $\int_{[a,b]} \phi$ et on écrit :

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$



Le nombre réel $\int_{x_0}^{x_5} \phi(x)\,dx$ représente l'aire algébrique des réctangles hachurés.

Proposition 2.2

Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, alors, $\lambda f + g$ et $|f|$ sont en escalier.

Et $\int_a^b \lambda f + g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$; $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ et ...

Preuve :

A partir de la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier.

3 Fonctions intégrables au sens de Riemann

A partir de la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on construit l'intégrale d'autres fonctions.

On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit f :

$[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définie les deux nombres réels :

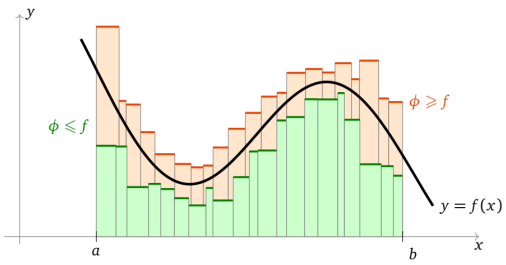
$$S_-(f) := \sup\left\{\int_a^b \phi(x)dx; \phi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}); \phi \leq f \,\text{sur}[a,b]\right\}$$

$$S_+(f) := \inf\left\{\int_a^b \phi(x)dx; \phi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}); f \leq \phi \,\text{sur}[a,b]\right\}$$

On note que ces deux nombres $S_-(f)$ et $S_+(f)$ existent, car f est bornée !!

Définition 3.1: Riemann-intégrable

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée ; on dit que f est intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable) sur $[a,b]$ si, $S_-(f) = S_+(f)$, ce nombre s'appelle l'intégrale de f sur $[a,b]$, et se note $\int_a^b f$.



Proposition 3.1:

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, f est intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier φ et μ sur $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \mu(x) \text{ et } \int_a^b \mu(x)dx \leq \varepsilon$$

3.1 Exemples des fonctions R-intégrables

Proposition 3.2: fonction monotone

Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone sur le compact $[a,b]$ est intégrable.

Preuve :

Pour fixer les idées, supposons f croissante et considérons une subdivision de $[a,b]$ de la forme $(a, a+h, a+2h, \ldots, a+ nh)$, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ étant quelconque, et le nombre réel h défini par $a+nh=b$, c'est-à-dire $h=(b-a)/n$. Nous définissons deux fonctions ϕ, ψ en escalier sur $[a,b]$ en posant, pour tout x appartenant à $[a+kh, a+(k+1)h[$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$:

$$\phi(x) = f(a+kh), \quad \psi(x) = f(a+(k+1)h) \text{ et } \phi(b) = \psi(b) = f(b)$$

On a alors

$$\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in [a,b]$$

et

$$\int_a^b \phi(x)dx = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh); \int_a^b \psi(x)dx = h\sum_{k=1}^{n} f(a+kh)$$

d'où

$$\int_a^b [\psi(x)-\phi(x)]dx = h[f(a+nh)-f(a)] = \frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$$

et pour chaque $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir n assez grand de manière à avoir

$$\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)] < \varepsilon$$

d'où le résultat désiré.

Proposition 3.3: fonction continuee

Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur le compact $[a,b]$ est intégrable.

Preuve :

L'intervalle $[a,b]$ étant compact, on sait, d'après le théorème de Heine, que la fonction f est uniformément continue sur cet intervalle. Quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe donc un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [a,b]$ vérifiant $|y-x| < \eta$, on ait $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$.

Considérons alors une subdivision $(a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b)$ de $[a, b]$ de pas inférieur à η, c'est-à-dire telle que le plus grand des nombres $a_i - a_{i-1} (i = 1, 2, \ldots, n)$ soit au plus égal à η. On obtient deux fonctions ϕ, ψ, en escalier sur $[a, b]$ en posant

$$\phi(a_i) = \psi(a_i) = f(a_i) \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

et

$$\phi(x) = f(a_i) - \varepsilon, \quad \psi(x) = f(a_i) + \varepsilon$$

pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[(i = 1, 2, \ldots, n)$. Or la subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ a été choisie de manière que l'on ait $|f(x) - f(a_i| < \varepsilon$ pour tout x élément de $[a_{i-1}, a_i]$. On a donc, pour tout $x \in [a, b]$:

$$\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

$$\int_a^b [\phi(x) - \psi(x)] dx = \int_a^b 2\varepsilon dx = 2\varepsilon(b - a)$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on conclut que la fonction f est intégrable sur $[a, b]$

Définition 3.2: fonction réglée

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite réglée s'il existe une suite de fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

Proposition 3.4: caractérisation d'une fonction réglée

pour qu' une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soit réglée, il faut et il suffit que f admette une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.

Théorème 3.1

Toute fonction réglée sur un intervalle compact $[a, b]$ est intégrable.

Preuve :

f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite (f_n) de fonctions en escalier. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Notons $\alpha = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ sur $[a,b]$, et posons $\phi = f_{n_0} + \alpha$ et $\psi = f_{n_0} - \alpha$. Les fonctions g et h sont en escalier sur $[a,b]$ et vérifient

$$\phi \leq f \leq \psi \text{ et } \int_a^b [\phi(x) - \psi(x)]dx = \varepsilon$$

On en conclut que f est intégrable sur $[a,b]$

Corollaire 3.1

Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle compact $[a,b]$ est intégrable.

Remarque 3.1. *fonction de Direchlet La fonction de Direchlet sur* $[0,1] \to \mathbb{R}$ *; définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

4 Probpriétés de L'intégrale de Riemann

Proposition 4.1: Relation de Chasles

Soient $a \leq b$ deux réels et $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$. Et on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

1) $a < b$, $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

Soit $a \leq b$ deux réels et f et g deux fonctions R-intégrables sur $[a,b]$.

3) Pour tout réel λ, $f+\lambda g$ est R-intégrable et $\int_a^b (f+\lambda g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \lambda \int_a^b g(x)\,dx$. (Linéarité).

4) Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

5) Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

6) $|f|$ est R-intégrable sur $[a,b]$ et $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

Preuve :

Montrons la propriétés 3) de la linéarité d'intégrale de Riemann.

1) On montre que si f et g sont intégrables, alors $f+g$ est intégrable.

2) Puis $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. (Linéarité).

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f et g sont intégrables sur $[a,b]$, donc d'aprés la proposition (3), on peut trouver des fonctions $\phi_1, \eta_1, \phi_2, \eta_2$ dans $\mathcal{E}[a,b]$ telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b] : |f(x) - \phi_1(x)| \leq \eta_1(x) \quad et \quad \int_a^b \eta_1(x)dx \leq \frac{1}{2}\varepsilon. \\ \forall x \in [a,b] : |g(x) - \phi_2(x)| \leq \eta_2(x) \quad et \quad \int_a^b \eta_2(x)dx \leq \frac{1}{2}\varepsilon. \end{cases}$$

Or $\phi_1 + \phi_2$ et $\eta_1 + \eta_2$ sont dans $\mathcal{E}[a,b]$, et $\forall x \in [a,b] : |f(x) + g(x) - (\phi_1 + \phi_2(x))| \leq \eta_1(x) + \eta_2(x) \quad et \quad \int_a^b \eta_1(x) + \eta_2(x)dx \leq \varepsilon.$

Ce qui prouve que $f+g$ est intégrable sur $[a,b]\cdot$

Il nous reste à montrer $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Soit $\phi_1 \, et \, \phi_2 \in \mathcal{E}[a,b]$, on a : $\int_a^b \phi_1(x)\,dx \leq S_-(f)$ et $\int_a^b \phi_2(x)\,dx \leq S_-(g)$ (voir définition3.

Comme $\int_a^b \phi_1 + \phi_2 = \int_a^b \phi_1 + \int_a^b \phi_2 \leq S_-(f) + S_-(g),$

et

$$\phi_1 + \phi_2 \leq f + g \Rightarrow \begin{cases} S_-(f+g) & \leq S_-(f) + S_-(g), \\ S_+(f+g) & \geq S_+(f) + S_+(g), \end{cases}$$

Comme f et g sont intégrables sur $[a,b]$, $S_-(f) = S_+(f) = \int_a^b f$ et$S_-(g) = S_+(g) = \int_a^b g$
Donc : $S_-(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq S_+(f+g)$ finalement comme $f+g$ est intégrable sur $[a,b]$ d'aprés 1), $S_-(f+g) = \int_a^b f+g = S_+(f+g)$ c'est notre résultat déisiré.

4.1 Formule de la moyenne

Théorème 4.1: Premièr formule de la moyenne

Soient f et g deux fonctions R-intégrables sur $[a,b]$ telles que f est continue sur $[a,b]$ et g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

.

Corollaire 4.1

Si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe c tel que $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x) = f(c)$

Preuve :

Puisque f est continue sur $[a,b]$, alors il existent m et M dans $\mathbb{R}$ tels que $f([a,b]) = [m,M]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, l'égalité (4.1)est vraie pour tout $c \in [a,b]$.
Si $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, On a $m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$ (car $g > 0$ par exemple). Ainsi $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$. f est continue sur $[a,b]$ elle prend toutes les valeurs comprises entre m et M (théorème des valeurs intermédiaires).
Donc il existe $c \in [a,b]$ avec $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$.

Execrices :

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \dfrac{f(t)}{t}dt$

Solution : On a f est continue sur $[0,x]$, et $t \to g(t) = t$ est R-intégrable sur $[0,x]$, elle garde un signe constant sur $[0,x]$.

Alors : $\exists c_x \in [0,x]$: tq $\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt = f(c_x)\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}f(c_x)$

d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt = \frac{1}{2}f(0)\cdot$

De la même façon on montre que $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}dt = f(0)\ln(2)\cdot$

4.2 Somme de Riemann pour les fonctions continues

Théorème 4.2

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\delta = x_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de $[a,b]$ et $(\xi_i)_{0\le i\le n}$ une suite de points tels que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

Alors

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ou h désigne le pas de la subdivision δ. En particulier

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Exemples 4.1.

Calculer les limites de la suite suivante : $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}$;

Solution : *On a* $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}$;

soit $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, f *étant continue sur l'intervalle* $[0,1]$ *et* $f(0+i\dfrac{(1-0)}{n})=\dfrac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}$

donc $u_n \to \dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{2}-1.$

Exercice :

Calculer les limites des suites suivantes :

(a) $u_n=\dfrac{1}{n}[\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+.....+\sqrt[n]{2^n}]$; $\quad u_n=\dfrac{1}{n^3}[1\sqrt{1^2+n^2}+2\sqrt{2^2+n^2}.....+n\sqrt{n^2+n^2}]$

(b) $v_n=n\cdot\left[\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\dfrac{1}{3^2+n^2}+.....+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right]$; $\quad v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$

(c) $w_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$; $\quad w_n=\dfrac{1}{np+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^p$ pour p entier naturel

(d) $k_n=\dfrac{1}{n}\cdot\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\frac{p}{\sqrt{n^2+p^2}}$; $\quad k_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^p$; $\quad k_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$

(e) $r_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}p\sqrt[n]{e^p}$; $\quad r_n=\dfrac{1}{n}\left[\arctan\left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)+\arctan\left(\dfrac{k-n}{k+n}\right)+....+\arctan\left(\dfrac{n-n}{n+n}\right)\right]$

(f) $z_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{2[\ln(p+n)-\ln(n)]+5}{p+n}$; $z_n=\dfrac{1}{n}\left[\arcsin\left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)+\arcsin\left(\dfrac{k-n}{k+n}\right)+.....+\arcsin\left(\dfrac{n-n}{n+n}\right)\right.$

(g) $s_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(n+p)(1+\ln(p+n)-\ln(n))}$; $\quad s_n=n\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{k}{n}}}{k^2}$

(h) $\alpha_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

5 Primitives

Définition 5.1

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$

$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une **primitive** de f si

F est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(x)=f(x)$ pour tout $x\in[a,b]$.

Remarque 5.1. *Si* G *est une autre primitive de* f *sur* $[a,b]$, *alors,* $F=G+const$.

Théorème 5.1:

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale indéfinie :

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, t \to \int_a^t f(x)dx$$

est une primiive de f sur $[a, b]$; et G est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_{x=a}^{x=b} := G(b) - G(a)\cdot$$

Preuve :

Tout d'abord sur l'intervalle compact $[a, b]$, l'intégrale indéfinie : $F : [a, b] \to \mathbb{R}, t \to \int_a^t f(x)dx$ admet pour dérivée $f(t)$ en tout point t de $[a, b]$ où f est continue.
En utilisant le remarque 5.1, pour F et G deux primitives de f sur $[a, b]$ on a :
$F = G + const$, donc $G(a) = F(a) + const$ et $G(b) = F(b) + const = \int_a^b f(x)dx$, ce qui implique

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)\cdot$$

Remarque 5.2. *Dans le théorème ci-dessus, l'hypothèse de continuité est cruciale. Considérons en effet la fonction f définie sur $[-1, 1]$ Par*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \in [-1; 0[, \\ 0 & si \quad x = 0, \\ 1 & si \quad x \in]0, 1], \end{cases}$$

On a

$$F(t) := \int_a^t f(x)dx = \begin{cases} -t & si \quad t \in [-1; 0[, \\ 0 & si \quad t = 0, \\ t & si \quad t \in]0, 1], \end{cases}$$

Donc $F(t) = |t|$, $\forall t \in [-1, 1]$, comme F n'est pas dérivable en 0, elle ne peut pas être une

primitive de f.

Notation : Sur un intervalle, une primitive de f sera notée $\int f(x)dx$ et elle est définie à ue constante additive près.

Exemples 5.1. *1)* $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$, $\int_0^1 e^x\, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.

2) $g(x) = x^2$, $G(x) = \frac{x^3}{3}$, $\int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

3) $\int_a^x \cos t\, dt = \left[\sin t\right]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$.

5.1 Primitives des fonctions usuelles

1) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) $\int \dfrac{1}{xdx} = \log|x| + K$.

3) $\int \cos x dx = \sin x + K$.

4) $\int \sin x dx = -\cos x + K$.

5) $\int e^x dx = e^x + K$.

6) $\int shxdx = chx + K$.

7) $\int chxdx = shx + K$.

8) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + K$.

9) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + K$ avec $-1 < x < 1$.

10) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = argshx + K$.

11) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = argchx + K$ avec $x > 1$.

Théorème 5.2: Deuxième formule de la moyenne

Soient f et g deux fonctions R-intégrables sur $[a,b]$ telles que f est continue sur $[a,b]$ et g positive et décroissante sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(a+0)\int_a^b f(t)\,dt$$

.

5.2 Pratique du calcul intégarl

Nous allons içi aborder quelques méthodes pour calculer des primitives d'une large classe des fonctions.

5.2.1 Changement de variable

Théorème 5.3: Formule de changement de variable

Soient ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, pour tout fonction f définie et continue sur $\phi([a,b])$ on a :

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

.

Preuve : Montrons que : $\int_{\phi(a)}^{\phi(u)} f(x)\,dx = \int_a^u f(\phi(t))\phi'(t)\,dt \ \forall u \in [a,b]$.

On pose $F(u) = \int_{\phi(a)}^{\phi(u)} f(x)\,dx$ et $G(u) = \int_a^u f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$. On a $F(a) = G(a) = 0$.

Comme F et G sont dérivables sur $[a,b]$ (F est dérivable sur $[a,b]$ composée de deux fonctions dérivables $v \to \int_{\phi(a)}^{v} f(x)dx$ et G est dérivable il s'agit d'une intégrale indéfinie de $(fo\phi)\phi'$ qu 'est continue sur $[a,b]$).

On alors : $F'(u) = f(\phi(u))\phi'(u) - f(\phi(a))\phi(a)$ et $G'(u) = f(\phi(u))\phi'(u) - f(\phi(a))\phi(a) \Rightarrow F = G + const$ et $const = 0$· CQFD.

Exemples 5.2. *Exemples et Applications*

1. *Calculer la valeur de l'intégrale* $\int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt$.
   Considérons les fonctions f *et* ϕ *définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $\phi(t) = e^t$ *et* $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. *Puisque* ϕ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]$ *et* f *est continue sur le compact* $\phi([0,1]) = [1,e]$, *d'aprés le théorème ci-dessus,*

$$\int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt = \int_1^e \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_1^e = \arctan(e) - \frac{\pi}{4}\cdot$$

2. *Calculons* $\int_2^5 \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt$, *Soit* $\phi(t) = \sqrt{t-1}$ *et* $f(x) = 2(x^2+1)$. *Puisque* ϕ *est de de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[2,5]$ *et* f *est continue sur* $\phi([2,5]) = [1,2]$, *d'aprés le théorème ci-dessus,*

$$\int_2^5 \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt = \int_1^2 2(x^2+1)\,dx = 2[\frac{x^3}{3} + x]_1^2 = \frac{20}{3}\cdot$$

Remarque 5.3. *Il est noté qu'il n'est pas nécessaire que la fonction* ϕ *soit bijective. En revanche il faut s'assurer que la fonction* f *soit bien définie et continue sur l 'intervalle* $\phi([a,b])$*(intervalle n'admet pas nécessairement* $\phi(a)$ *et* $\phi(b)$ *pour extrémités). En pratique on pose* $x = \phi(t)$ *etben remplace* $dx = \phi'(t)\,dt$

Exemples 5.3.

1. *Calculer* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$
   Posons $x = \sin(t)$, *on a* $dx = \cos(t)dt$ *et* $\sqrt{1-x^2}dx = |\cos(t)|\cos(t)dt$
   d'où : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = [\frac{t+\frac{1}{2}\sin(2t)}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\cdot$
2. $\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx\,quad0 < a < 1$
   Posons $x = \frac{1}{t}$, *on a* $dx = \frac{-1}{t^2}dt$ *et* $\frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{-\ln(t)}{1+(\frac{1}{t})^2}\frac{-1}{t^2}\,dt$
   d'où : $\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = \int_1^a \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt = -\int_a^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$
   Ainsi : $\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dx = \int_1^a \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt + \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dx = 0\cdot$

Exemples 5.4. *Applications*

1. *Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors,* $\displaystyle\int_a^b \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan(b) - \arctan(a).$
2. *Si de plus u ne s'annule pas sur $[a,b]$, alors,* $\displaystyle\int_a^b \frac{u'(x)}{u'(x)}\,dx = \ln(|u(b)|) - \ln(|u(a)|)$
3. $\displaystyle\int_{-a}^{a} u(x)\,dx = \int_0^a u(x)+u(-x)\,dx$, *en particulier si u est paire,* $\displaystyle\int_{-a}^{a} u(x)\,dx = 2\int_0^a u(x)\,dx$, *et si u est impaire,* $\displaystyle\int_{-a}^{a} u(x)\,dx = 0\cdot$
4. ***(Invariance par translation)*** *Si u est intégrable sur $[a,b]$ alors, $\forall s \in \mathbb{R}$, la fonction $u_s : x \to u(x-s)$ est intégrable sur $[a-s, b-s]$ et*

$$\int_{a-s}^{b-s} u_s(x)\,dx = \int_{a-s}^{b-s} u(x+s)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx\cdot$$

5. ***(Régle de Bioche)*** *Pour le calcul des primitives de la forme $F(\cos(x);\sin(x))\,dx$ où F est une fraction rationnelle à deux variables.*

   On pose $H(x) = F(\cos(x);\sin(x))$,

   - *si $H(-x) = -H(x)$ pose $t = \cos(x)$*
   - *si $H(\pi - x) = -H(x)$ pose $t = \sin(x)$.*
   - *si $H(\pi + x) = H(x)$ pose $t = \tan(x)$ sinon $t = \tan(\frac{x}{2}$. (rappel; pour $t = \tan(\frac{x}{2})$; $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$).*

Exercice :

Calculer $I = \displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$; et $J = \displaystyle\int \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx.$

Solution : Calcul de I. On pose $t = \cos(x)$, on a $dt = -\sin(x)dx$

d'où $J = \int \frac{-1}{1+t^2}dt = -\arctan(t) + const = -\arctan(\cos(x)) + const$ avec $const \in \mathbb{R}$.

Clacule de J. On a $J = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2(x)} = \int \frac{dx}{2\cos^2(x)+\sin^2(x)} = \int \frac{dx}{\cos^2(x)(2+\tan^2(x))}.$

On pose $t = \tan(x)$, on a $dt = (1+\tan^2(x)dx = \frac{dx}{\cos^2(x)}$.

D'où : $J = \displaystyle\int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}.$

On pose de nouveau $v = \frac{t}{\sqrt{2}}$, on a $dv = \frac{dt}{\sqrt{2}}$, parsuite, $J = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\displaystyle\int \frac{dv}{1+v^2},$

Finalment ; $J = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\big(\dfrac{\tan(x)}{\sqrt{2}}\big) + const\cdot$

Exercice[Calcul de $\int_0^1 \frac{1}{chx}\,dx$]

On a $\int_0^1 \frac{1}{chx}\,dx = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^{2x}+1}dx$ car $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

— Changement de variable $t = e^x$

— Alors $dt = e^x\,dx$

— Pour $x = 0$ on a $t = e^0 = 1$

— Pour $x = 1$ on a $t = e^1 = e$

$$\int_0^1 \frac{2e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \int_1^e \frac{2\,dt}{t^2+1} = 2\big[\arctan t\big]_1^e$$

$$= 2\arctan e - 2\arctan 1 == 2\arctan e - \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice

Calcul de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$

— Changement de variable $u = g(x) = 1 - x^2$

— Alors $du = g'(x)\,dx = -2x\,dx$

— Pour $x = 0$ on a $u = g(0) = 1$

— Pour $x = \frac{1}{2}$ on a $u = g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

$$\int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int_1^{3/4} \frac{-\frac{1}{2}\,du}{u^{3/2}} = -\tfrac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-3/2}\,du$$

$$= -\tfrac{1}{2}\big[-2u^{-1/2}\big]_1^{3/4} = \big[\frac{1}{\sqrt{u}}\big]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$$

5.2.2 Intégartion par parties

Théorème 5.4: Formule d'intégration par parties

Si u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Preuve :

On a uv est une primitive de $u'v+uv'$, en effet ; u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $(uv)' = u'v+uv'$.

comme la fonction $u'v+uv'$ est continue, d'après le théorème 5, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\,dx = (uv)(b)-(uv)(a) = u(b)v(b)-u(a)v(a).$$

Exemples 5.5. *Calcul de* $\int_1^e x\ln x\,dx$

$u=\ln(x)$ $u'=\frac{1}{x}$

$v'=x$ $v=\frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln(x)\cdot x\,dx &= \int_1^e uv' \\
&= [uv]_1^e - \int_1^e u'v \\
&= \left[\ln x\cdot\tfrac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{x}\tfrac{x^2}{2}\,dx \\
&= \left(\ln e\tfrac{e^2}{2} - \ln 1\tfrac{1^2}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx \\
&= \tfrac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&= \tfrac{e^2}{2} - \tfrac{e^2}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

Exemples 5.6. *Calcul de* $\int \arcsin x\,dx$

$$\int 1 \cdot \arcsin x \, dx = \big[x \arcsin x\big] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \qquad u = \arcsin x,\ v' = 1 \ \ (\text{donc } u' = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } v = x)$$

$$= \big[x \arcsin x\big] - \big[-\sqrt{1-x^2}\big] = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c; c \in \mathbb{R}$$

Exemples 5.7. *Calcul de* $\int x^2 e^x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot e^x \, dx &= \int uv' && u = x^2 \quad u' = 2x \\
&= uv - \int u'v && v' = e^x \quad v = e^x \\
&= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx && u = x \quad u' = 1 \\
&= x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x) && v' = e^x \quad v = e^x \\
&= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + K) \\
&= (x^2 - 2x + 2) e^x + K; K \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Remarque 5.4. *(Règle ALPES) Dans une intégration par parties, parfois c'est difficile de décider la première fonction à dériver. La régle d'ALPES nous aide, elle consiste à dériver les fonctions qui se situent le plus à gauche en premier dans l'écriture ALPES avec :*

A : arccos, arcsin, arctan, *argsh, et argth.*

L : log.

P : *polynôme en fonction rationnelle.*

E : exp.

S : sin, cos, tan, *sh, ch et th*

Exercice :

1. Claculer $\int \ln(1+x^2)\, dx$; $\int_0^{\pi} e^x \cos^2(x)\, dx$; $\int_a^1 \frac{1}{x^3} e^{\frac{-1}{x}}\, dx$.

2. $\int (x^3 - x)e^{2x}\,dx \int \arctan(x)\,dx$·
3. Soit $I_n = \int_1^e x^2(\ln(x))^n\,dx$, donner une relation entre I_{n+1} etI_n·
4. Soit $I_n = \int_1^e (1-x)^n e^x\,dx$, donner une relation entre I_{n+1} etI_n·

5.3 Téchniques de calcules :

Pour calculer une intégrale, on a toujours le problème de savoir quelle méthode utilisée, est ce que un changement d variable (il'y en a beaucoup) ou une intégration par parties ou d'autres, dans la suite on va donner une série de méthodes concernant certains classes de fonctions.

5.3.1 Primitivs des fractions rationnelles :

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle c -à -d $F(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ où A et B deux fonctions polynômes. Les primitives de $x \to F(x)$ existent sur toute intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun pôle. On procède par étapes :

1ière étape : Si $deg(P) \geq degQ$, on fait d'abord une division Euclidienne et donc on a : $P = EQ + R$ avec $deg(R) \leq \deg(P)$. D'où $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$.

2éme étape : On fait la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ de $\frac{R}{Q}$.

Puis, on se ramène au calcul des primitives de :

i) la fonction polynôme $x \to E(x)$ (qui est facile).

ii) $x \to \dfrac{1}{(x-a)^n}$.

iii) $x \to \dfrac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^n}$, avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Proposition 5.1: Primitive de $\dfrac{1}{(x-a)^n}$

avec $n \in \mathbb{N}$

1) Pour $n = 1$, on a $\int \dfrac{dx}{(x-a)} = \ln|x-a| + c$, c constante réelle.

2) Pour $n \neq 1$, on a $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n} = \dfrac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c$, c constante réelle.

Proposition 5.2: Primitive $x \to \dfrac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}$

On a $\dfrac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n} = \gamma \dfrac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} + \delta \dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$

1) Si $n=1$, $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \ln(|ax^2+bx+c|)+cte$

2) Si $n \geq 2$; $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)^n}\,dx = \frac{1}{-n+1}u(x)^{-n+1}+c = \frac{1}{-n+1}(ax^2+bx+c)^{-n+1}+c$

3) Si $n=1$, calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$. Du type $\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c$

4) Si $n \geq 2$, calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$. Du type $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$.

Une Intégration par partie permet de passer de I_n à I_{n-1}

Exemples 5.8 (Primitive de $x \to \dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$).

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+x+1}$$

1. *Écrire* $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$ *sous la forme* $\frac{1}{u^2+1}$ *(dont une primitive est* $\arctan u$*)*

$$\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}} = \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2+1}$$

On pose $u = \dfrac{4}{\sqrt{7}}(x+\dfrac{1}{4})$ *(et donc* $du = \dfrac{4}{\sqrt{7}}dx$*)*

$$\int \frac{dx}{2x^2+x+1} = \int \frac{8}{7}\frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2+1} = \frac{8}{7}\int \frac{du}{u^2+1}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan u + c = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)+c$$

2. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)+c$

Exemples 5.9 (Calcul de $I_2 = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^2}$).

Intégration par parties à partir de $I_1 = \displaystyle\int \frac{du}{u^2+1}$

$f = \dfrac{1}{u^2+1}$ *et* $g'=1$

(avec $f' = -\dfrac{2u}{(u^2+1)^2}$ *et* $g=u$*)*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{du}{u^2+1} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + \int \frac{2u^2\,du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2}du \\ &= \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{du}{u^2+1} - 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2I_1 - 2I_2 \end{aligned}$$

D'où $I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c$ *Mais* $I_1 = \arctan u$ *donc*

$$I_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \tfrac{1}{2}\arctan u + \tfrac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c$$

5.3.2 Primitivs d'un polynôme en sin et cos :

On se ramène au cas : $I_{p,q} = \int \cos^p(x)\sin^q(x)\,dx\cdot$

Il y'a trois cas envisagé :

1. Si $p = 2k+1$, impaire, $I_{p,q} = \int (1-\sin^2(x))^k \sin^q(x)\sin'(x)\,dx$
   Changement de variable $u = \sin(x)$
2. Si $q = 2k+1$, impaire, $I_{p,q} = -\int (1-\cos^2(x))^k \cos^p(x)\cos'(x)\,dx$
   Changement de variable $u = \cos(x)$
3. Si p et q tout les deux paires, dans ce cas on fait la linéarisation

Exemples 5.10. $I = \int \cos(x)\sin^2(x)\,dx$

On pose $u = \sin(x)$ *; on a* $du = \cos(x)dx$ *et*

$$I = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{1}{3}\sin^3(x) + c; \quad c \in \mathbb{R}\cdot$$

Exemples 5.11. $I = \int \cos^4(x)\sin^3(x)\,dx$

On pose $u = \cos(x)$ *; on a* $du = -\sin(x)dx$ *et*

$$I = -\int u^4 - u^6\,du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = -\frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{1}{7}\cos^7(x)c; \quad c \in \mathbb{R}\cdot$$

Exemples 5.12. $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$

On a $\cos^4 x = \cos^2 x \cos^2 x = \big(\frac{\cos(2x)+1}{2}\big)\big(\frac{\cos(2x)+1}{2}\big)$.

donc $\cos^4 x \sin^2 x = \big(\frac{\cos(2x)+1}{2}\big)\big(\frac{\cos(2x)+1}{2}\big)\big(\frac{1-\cos(2x)}{2}\big)$
d'où $\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \big(\frac{\cos(2x)+1}{2}\big)\big(\frac{1-\cos(2x)^2}{4}\big)$.
or $\cos(2x)^2 = \dfrac{1+\cos(4x)}{2}$
alors

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \sin^2 x dx &= \big(\frac{\cos(2x)+1}{2}\big)\big(\frac{1-\cos(4x)}{8}\big)\int \cos^4 x \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{16}\big(1-\cos 4x+\cos(2x)-\cos(4x)\cos(2x)\big)\end{aligned}$$

or $\cos(4x)\cos(2x) = \dfrac{1}{2}(\cos(6x)+\cos(2x))$ *et* $\int \cos(ax)dx = \frac{\sin(ax)}{a} + cte$

d'où $\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \dfrac{x}{16} - \dfrac{\sin(4x)}{64} + \dfrac{\sin 2x}{32} - \dfrac{1}{32}\big(\dfrac{\sin x}{6} + \dfrac{\sin(2x)}{2}\big) + cte$

5.3.3 Primitives des fonctions rationnelles en $e^{\alpha x}$

Pour calculer $\int f(e^{\alpha x})dx$ où f est une fonction rationnelle et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

i) On utilise en général le changement de variable $t = e^{\alpha x}$.

ii) $dt = \alpha e^{\alpha x}dx = \alpha t dx$ donc $dt = \int \frac{dt}{\alpha t}$.

iii) donc $\int f(e^{\alpha x})dx = \int \dfrac{f(t)}{\alpha t}dt$

Exemples 5.13. *Calculer* $\int \dfrac{1}{e^{2x}+e^x-2}dx$
On pose $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$
donc $I = \int \dfrac{1}{t^2+t-2}\dfrac{dt}{t} = \int \dfrac{1}{t(t-1)(t+2)}dt$ *or* $\frac{1}{t(t-1)(t+2)} = \frac{1}{6}\big(\frac{-3}{t} + \frac{2}{t-1} + \frac{1}{t+2}\big)$
alors $I = \dfrac{1}{6}\int \big(\dfrac{-3}{t} + \dfrac{2}{t-1} + \dfrac{1}{t+2}dt\big)$
d'où $I = \dfrac{1}{6}\big(-3\ln(|t|) + 2\ln(|t-1|) + \log(|t+2|)\big)$
enfin $I = -\dfrac{1}{2}\ln(|e^x|) + \dfrac{1}{3}\ln(|e^x-1|) + \dfrac{1}{6}\log(|e^x+2|) + cte\cdot$

CHAPITRE 2

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Nous avons étudié l'intégrale d'une fonction définie sur un intervalle compact. La question se pose naturellement d'intégrer une fonction sur intervalle non fermé ou non borné de $\mathbb{R}$, ces deux sortes d'intégrales dites généralisées ou impropres seront définies comme limites d'intégrales prises sur des sous-intervalles compacts.

1 Intégrale généralisée

Définition 1.1: Fonction localement intégrable

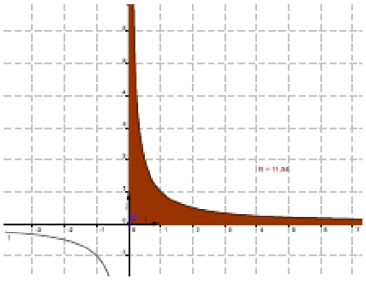
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est localement intégrable sur I si elle est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$ inclus dans I.

Dans la suite nous allons étudier l'intégrale sur des intervalles non fermés ou non bornés de la forme :

1. $I =]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$
2. $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$
3. $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

Remarque 1.1. *Le changement de variable* $u = -t$ *donne* $\int_x^b f(t)\,dt = \int_{-b}^{-x} f(-u)\,du$ *ce qui montre que tous les résultats de convergence que nous allons établir lorsque* $-\infty < a < b \leq +\infty$ *s' adaptent automatiquement au cas* $-\infty \leq a < b < +\infty$.

On suppose désormais que $0 < a < b \leq +\infty$ **.**



Pour tout $a < x < b$, associons à $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ la fonction $F : [a, b[\to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Théorème 1.1: Etude de convergence cas $I = [a, b[$

f une fonction est localement intégrable sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.
$\int_a^b f(t)\,dt$ converge si $\lim_{x\to b} F(x) = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie. Si c'est le cas, on pose : $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt$.
Cette limite est appelé l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$. Lorsque l'intégrale ne converge pas on dit qu'elle diverge.

Exemples 1.1. *La fonction* $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \to e^{-t}$ *est continue, donc localement intégrable. Pour tout* $x \geq 0$, *on a* $\int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}$ *et comme,* $\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, *on conclut que l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ *est convergente et sa valeur est égale à* 1.

Exemples 1.2. *La fonction* $[0, 1[\to \mathbb{R}$, $t \to \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ *est continue, donc localement intégrable. Pour tout* $x \in [0, 1[$, *on a* $\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin(x)$, *et puisque,* $\lim_{x\to 1} \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ *; on conclut que l'intégrale généralisée* $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ *est convergente et sa valeur est égale à* $\dfrac{\pi}{2}$.

Exemples 1.3. *La fonction* $[1, 2[\to \mathbb{R}$, $t \to \dfrac{1}{(t-2)^2}$ *est continue, donc localement intégrable.*

Pour tout $x \in [1,2[$, *on a* $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\frac{1}{(t-2)^2}}\,dt = \frac{-1}{x-2} - 1$, *et puisque,* $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x-2} - 1 = +\infty$ *; on conclut que l'intégrale généralisée* $\int_1^2 \frac{1}{\frac{1}{(t-2)^2}}\,dt$ *est divergente.*

Exemples 1.4. *La fonction* $[0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $t \to \cos(t)$*et* $t \to \sin(t)$ *sont continues, donc localement intégrables. Pour tout* $x \geq 0$, *on a* $\displaystyle\int_0^x \cos(t)\,dt = \sin(x)$ *et* $\int_0^x \sin(t)\,dt = 1-\cos(x)$ *comme les fonctions* $x \to \cos(x)$ *et* $x \to \sin(x)$ *n'admettent pas de limite (finie) quand* x *tend vers* $+\infty$, *on déduit que les intégrales généralisées* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,dt$ *et* $\int_0^{+\infty} \sin(t)\,dt$ *sont divergentes.*

Exemples 1.5. *Prouver que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ *converge*
$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big[\arctan t\Big]_0^x = \arctan x$, *et on a* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
ainsi : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$ *alors l'intégrale converge.*

Proposition 1.1: Intégrale de référence

Pour tout $\alpha in \mathbb{R}$ fixé.

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{converge} \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{converge} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Preuve :

Étudiez la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.

Si $\alpha = 1$ alors $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{t} = \ln(1) - \ln(x)$ or $\displaystyle\lim_{x->0} -\ln(x) = +\infty$ donc il diverge.

$\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left[1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]$ pour tout $\alpha \neq 1$. $\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ admet une limite finie quand $x \to 0^+$ ssi $\alpha - 1 < 0$ et c-à-d $\alpha < 1$.

Donc, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$

Etude de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.

De la même façon, on montre que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

et dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Conséquence : Soient a et b deux réels alors on a :

$$\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} \quad \text{converge} \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

Preuve :

Soit $x \in]a, b[$ et $F(x) = \int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha}\, dt$, on pose le changement de variable $u = b - t$, on a $du = -dt$, ce qui donne $F(x) = \int_{b-a}^{b-x} -\frac{1}{(u)^\alpha}\, du$. En faisant tendre x vers b on a : $\int_0^{b-a} \frac{du}{u^\alpha}\, du$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

Définition 1.2: Etude de convergence cas $I =]a, b[$

Soit f une fonction localement intégrable sur $]a, b[$ avec $a = -\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$, et soit c un point quelconque de $]a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si chacune des intégrales $\int_a^c f(x)\, dx$ et $\int_c^b f(x)\, dx$ est convergente. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Exemples 1.6. *Étudier la nature de l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$

Sur $]-\infty, 0]$, *la fonction* $t \to \frac{1}{1+t^2}$ *est continue, donc localement intégrable. De plus, pour chaque* $x \in]-\infty, 0]$, *on a* $\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\, dt = -\arctan(x)$ *et* $\lim_{x \to -\infty} -\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Donc converge $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$ *converge.*

De même, Sur $[0, +\infty[$, *la fonction* $t \to \frac{1}{1+t^2}$ *est continue, donc localement intégrable. De plus, pour chaque* $x \in [0, +\infty[$, *on a* $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Donc converge $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$ *converge.*

Parsuite $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi$ *converge.*

Remarque 1.2. *On voit immédiatement que cette définition ne dépend pas du choix du point c. En effet, si d est un autre point de* $]a,b[$*, alors,* $\int_c^x f(t)\,dt - \int_d^x f(t)\,dt = \int_c^d f(t)\,dt = const$

Attention : Il est inexacte de dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$·!!
prendre $f(t) = \sin(t)$ le premier intégrale à doite diverge alors que le deuxième à gauche converge =0.

Autre exemple : $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ diverge

$\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

Donc $\int_0^{+\infty} t\,dt$ diverge. D'après la définition $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ diverge.

Bien que, pour tout x, on ait $\int_{-x}^{+x} t\,dt = 0$

Remarque 1.3.

1. *Si* $\int_I f(t)\,dt$ *et* $\int_I g(t)\,dt$ *sont des intégrales impropres, alors*
$$\int_I f(t)\,dt \text{ et } \int_I g(t)\,dt \quad \text{convergent} \Leftrightarrow \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : \int_I \alpha f(t)+\beta g(t)\,dt \quad \text{converge}$$
2. *Si* $\int_I f(t)\,dt$ *et* $\int_I g(t)\,dt$ *divergent, on peut rien conclure sur la nature de* $\int_I \alpha f(t)+\beta g(t)\,dt$

Exemples 1.7. *Soit* $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ *et* $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$.

1. *Déterminer la nature de I et J.*
2. *Déterminer la nature de I + J.*
3. *Déterminer la nature de I − J. Conclure.*

Remarque 1.4. *Faux problème Soit* $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$*, comme* $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \neq \infty$ *donc ; 0 n'est pas un point singulier, ainsi l'intégrale I n'est pas générqlisée.*

2 Critères de convergence pour les fonctions positives

Proposition 2.1

Soit f une fonction continue positive ou nulle sur $[a,b[$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{converge} \Leftrightarrow \forall x \in]a,b[:\ F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{est majorée sur } [a,b[$$

Exemples 2.1. *Soit* $I=\int_0^1 \sin^2(\frac{1}{t})\,dt$.

On a : 0 *est le point singulier, int 2nd espèce*

$F(x)=\int_x^1 \sin^2(\frac{1}{t})\,dt \le \int_x^1 dt = 1-x<1$

donc : I converge.

Théorème 2.1: Critère de comparaison

Soit une f et g deux fonctions positives localement intégrable sur $]a,b[$ avec $b=\infty$ ou $f(b)=\infty$ tel que $0\le f\le g$ sur $]a,b[$, alors

$\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ converge,

$\int_a^b f(t)dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemples 2.2.

1. *Etudier la nature de l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^2}$.

   On a : $0<\frac{1}{x+x^2}<\frac{1}{x^2}, \quad \forall x\ge 1.$

   Et puisque $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ *converge car* $\alpha=2>1$ *(Intégrale de Riemann 1ere espèce)*

   donc : $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+x^2}$ *converge.*

2. *Etudier la nature de l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

   On a : $0<\frac{1}{x}\le 1 \Rightarrow 0\le e^{\frac{1}{x}}\le e$

   Donc : $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\le\frac{e}{x^2}$ *Or* $\int_1^{+\infty}\frac{e}{x^2}\,dx$ *converge, alors* $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ *converge.*

3. *Etudier la nature de l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.

   On a : $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \geq 0$ *et* $\forall x \geq 1$; $\quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x}$

   comme $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X e^{-x}\,dx = 1$ *converge*

   alors : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ *converge.*

4. *Etudier la nature de l'intégrale généralisée* $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(x)}{x^\alpha}\,dx$ *avec* $\alpha > 1$.

   On a : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{1+\cos(x)}{x^\alpha} \geq \frac{1}{x^\alpha}$

   Or : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *diverge, alors,* $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(x)}{x^\alpha}\,dx$ *diverge pour* $\alpha > 1$.

Corollaire 2.1: Régle $x^\alpha f(x)$ en $+\infty$

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ localement intégrable.

Si $f(x) \sim \frac{k}{x^\alpha}$, $k \neq 0, k \neq \infty$,

alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Si $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si $\alpha > 1$.

Si $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge si $\alpha \leq 1$.

Corollaire 2.2: Régle $(b-x)^\alpha f(x)$ en b^-

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ localement intégrable avec $f(b) = \infty$.

Si $f(x) \sim \frac{k}{(b-x)^\alpha}$, $k \neq 0, k \neq \infty$,

alors $\int_a^b f(x)dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

Si $\lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = 0$ alors $\int_a^b f(x)dx$ converge si $\alpha < 1$.

Si $\lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = +\infty$ alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge si $\alpha \geq 1$.

Applications

1. Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}dx$

   On a $x \to \frac{e^{-x}}{x}$ continue positive sur $]0,1]$

   Au voisinage de 0 : $\frac{e^{-x}}{x} \sim \frac{1}{x}$ $(k=1;\alpha=1)$ (Corollaire 2.2.2) Donc : $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}dx$ diverge.

2. Nature de $\int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{\sqrt{x}}dx$

   On a $x \to \frac{|\ln(x)|}{\sqrt{x}}dx$ continue positive sur $]0,1]$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-\frac{1}{2}}|\ln(x)| = 0$, pour $\alpha - \frac{1}{2} > 0$

   donc pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, on a $\int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{\sqrt{x}}dx$ est convergent.

   Explicitement : $\int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{\sqrt{x}}dx$

   $\frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = -x^{\frac{1}{2}}\ln x = -x^{\frac{1}{4}}\ln x.x^{\frac{-3}{4}}$.

   $\lim\limits_{x\to 0^+} -x^{\frac{1}{4}}\ln x = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon = 1 > 0,\ \exists\eta > 0\, 0 < x < \eta :\quad 0 < -x^{\frac{1}{2}}\ln x \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$, et $\frac{3}{4} > 1$ donc elle converge.

3. Étudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)e^x}}$

   On a : $f : x \to \frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)e^x}}$ est continue, positive sur $[1,+\infty[$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-\frac{1}{4}}e^{\frac{-x}{4}} = 0$, $\forall\alpha > \frac{1}{4}$ en particulier pour $\alpha > 1$.

   Donc : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)e^x}}$ converge.

4. La nature de $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,dx$

Théorème 2.2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup +\infty; +\infty$; $I = [a,b[$ et f ; g deux fonctions positives et localements intégrables sur I : On suppose que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de b Alors : $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ sont de même nature (c.a.d convergent ou divergent en même temps).

3 Calcul pratique des intégrales généralisées

3.1 Utilisation d'une primitive

Si la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et si elle admet sur $]a,b[$ une primitive F, la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ équivaut à l'existence des limites finies $F(a+0)$ et $F(b-0)$; et si ces limites existent, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b^-) - F(a^+)$$

Remarque 3.1. *Lorsqu'on calcule une intégrale généralisée sur $]a,b[$ au moyen d'une primitive, il faut s'assurer que la primitive considérée est continue sur $[a,b]$. Par exemple, l'écriture $\int_{-1}^{1} \ln x\,dx = [\ln|x|]_{-1}^{1} = 0$ n'a pas de sens car la fonction $x \to \ln|x|$ n'est pas définie en 0.*

3.2 Intégration par parties

Proposition 3.1

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$ telles que $\lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x) = l$ existe et finie. Si $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ est convergente, alors $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ est convergente et on a :
$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = l - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$

Exemples 3.1. *La fonction Γ d'Euler La fonction Γ d'Euler est définie par $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.*

La fonction Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

En effet :

1. *la fonction $t \to e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$.*
2. *Au voisinage de 0 : on a $e^{-t}t^{x-1}$ est positive et $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$ et $\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ converge pour tout $x > 0$.*
3. *Au voisinage de $+\infty$: on a $e^{-t}t^{x-1}$ est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.*

Montrer que $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$.

On procède en utilisant une intégration par parties ; on pose $u(t) = e^{-t}$ *et* $v(t) = \frac{t^x}{x}$ *ceçi pour* $(x > 0)$ *fixé.*

Sur $[0, +\infty[$, *les fonctions* u *et* v *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *et on a : au voisinage de* 0, $\lim_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$ *puis au voisinage de* $+\infty$ *;* $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, *on appliquant la formule d'intégration par parties on aura*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x}\,dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

Remarquons que $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma(n) = (n+1)!\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 3.2: 2ème exemple fondamentale : Intégrale de BERTRAND

Soient α et β deux nombre réels.

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta} \quad \text{converge} \Leftrightarrow \quad (\alpha < 1) \quad \text{ou} \quad (\alpha = 1 \,\text{et}\, \beta > 1$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \quad \text{converge} \Leftrightarrow \quad (\alpha > 1) \quad \text{ou} \quad (\alpha = 1 \,\text{et}\, \beta > 1$$

Preuve :

Montrons la deuxème équivalence :

Pour $\alpha > 1$; on écrit $\alpha = 1 + 2k$ avec $k > 0$. On a $\forall \beta \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{k+1}}.\frac{1}{t^k(\ln t)^\beta}$ et comme $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^k(\ln t)^\beta} = 0$, alors $0 < \frac{1}{t^k(\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{k+1}}$ et puisque $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{k+1}}$ converge alors $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge.

Pour $\alpha = 1$, si $\beta > 1$ alors, $\int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = [\frac{\ln^{-\beta+1}}{-\beta+1}]_e^x \to \frac{-1}{-\beta+1}$ converge qund $x \to +\infty$.

Pour $\alpha = 1$, si $\beta < 1$ alors, $\int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} \geq \int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)} = \ln(\ln(x)) \to +\infty$ quand $x \to \infty$ diverge.

Pour $\alpha < 1$; on écrit $\alpha = 1 - 2k$ avec $k > 0$. On a $\forall \beta \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{1-k}}.\frac{t^k}{(\ln t)^\beta}$ et comme $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^k}{(\ln t)^\beta} = +\infty$, alors pour t assez grand, $\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{1-k}}.\frac{t^k}{(\ln t)^\beta} \geq frac1t^{1-k}$ et puisque $\int_e^{+\infty} frac1t^{1-k}\,dt$ diverge alors $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ diverge.

N.B. un simple changement de variable $u = \frac{1}{t}$ nous permettra d'aboutir la première équivalence.

Exemples 3.2. *Étudier la nature de l'intégrale :* $\int_2^{+\infty} \sqrt{x^2+3x}\ln(\cos(\frac{1}{x}))\sin^2(\frac{1}{\ln(x)})\,dx$.

Les fonctions $x \to \sqrt{x^2+3x}$, $x \to \ln(\cos(\frac{1}{x}))$ *et* $\sin^2(\frac{1}{\ln(x)})$ *sont continues et sur* $[2,+\infty[$ *donc localement intégrables sur* $[2,+\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$ *: un développement asymptotique des fonctions nous permettra d'écrire :*

$\sqrt{x^2+3x} = x\sqrt{1+\frac{3}{x}} \sim_{+\infty} x$, $\cos(\frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$

et $\ln(\cos(\frac{1}{x})) = \ln(1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}) \sim_{+\infty} \frac{-1}{2x^2}$ *et* $\sin^2(\frac{1}{\ln(x)}) \sim_{+\infty} (\frac{1}{\ln^2(x)})$

D'où : $\sqrt{x^2+3x}\ln(\cos(\frac{1}{x}))\sin^2(\frac{1}{\ln(x)}) \sim_{+\infty} \frac{-1}{2x^2\ln^2(x)}$ *et comme* $\int_2^{+\infty} \frac{-1}{2x^2\ln^2(x)}\,dx$ *converge, intégrale de Bertrant 1ier espèce* ($\alpha = 1$ *; et* $\beta = 2 > 1$)

On déduit que $\int_2^{+\infty} \sqrt{x^2+3x}\ln(\cos(\frac{1}{x}))\sin^2(\frac{1}{\ln(x)})\,dx$. *converge.*

Exercice : Étudier la nature de l'intégrale : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{-t}{5}}|\sin(\ln(t))|}{(t-1)^{\frac{3}{2}}}\,dt$.

4 Intégrale généralisée d'une fonction de signe quelconque

4.1 Convergence absolue

Définition 4.1

Soit $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable.

On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente.

Théorème 4.1

Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

Preuve :

En effet : $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$!

En revanche, la réciproque est fausse en générale.

Exemples 4.1. *Soit* $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\, dx$.

$\forall x \geq 1; \quad |\frac{\sin(x)}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$, *comme* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ *est convergente.*

Alors, $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin(x)}{x^2}|\, dx$ *est convergente, i.e.* $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\, dx$. *est absolument convergente.*

D'où : $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\, dx$. *est convergente.*

Définition 4.2: Intégrale semi-convergente

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\, dx$ est semi-convergente si : $\int_a^b |f(x)|\, dx$ est divergente et $\int_a^b f(x)\, dx$ est convergente.

Exemples 4.2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ *est semi-convergente.*

En effet : soit $X \geq 1$, *on pose* $u'(x) = \sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$ *et* $v(x) = \frac{1}{x}$, *donc,* $u((x) = \sin^2(\frac{x}{2})$ *et* $v'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\sin(x)}{x}\, dx &= [\frac{1}{x}]_1^X + \int_1^X \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{X}\sin^2(\frac{X}{2}) - \sin^2(\frac{1}{2}) + \int_1^X \frac{\sin^2(\frac{x}{2}}{x^2}\, dx\end{aligned}$$

comme, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2})\, dx$ *est convergente (comparaison avec* $x \to \frac{1}{x^2}$*)* *et* $\frac{1}{X}\sin^2(\frac{X}{2}) \to 0$ *lorsque* $X \to +\infty$ *alors,* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ *est convergente.*

Reste à montrer que $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin(x)}{x}|\, dx$ *est divergente.*

On a : d'une part $\forall x \geq 1; \quad \frac{|\sin(x)|}{x} \geq \frac{|\sin(x)|^2}{x} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x}$,

et d'autre part

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx &= \lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx \\ &= \lim_{X\to+\infty}[\frac{\sin(2x)}{4x}]_x^1 + \int_1^X \frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx \\ &= \frac{\sin(2)}{4} + \int_1^{+\infty}\frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx\end{aligned}$$

Comme $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx$ *est absolument convergente, donc convergente. On déduit que* $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{2x}\,dx$ *est convergente et comme* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\,dx$ *est divergente.*

Alors, $\int_1^{+\infty}|\frac{\sin(x)}{x}|\,dx$ *est divergente.*

Théorème 4.2: Critère de Cauchy

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente} \quad \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0; \exists M \geq a; (u, v \geq a \Rightarrow |\int_u^v f(x)\,dx| \leq \varepsilon)$$

Théorème 4.3: Critère d'Abel

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$ ($b = \infty$ ou $f(b) = \infty$. telles que :

1. f positive, décroissante sur $[a, b[$ et $\lim_{x\to b} f(x) = 0$.
2. $\exists M > 0$, tel que, $\forall x, y \in [a, b[$ on ait $|\int_x^y g(t)\,dt| \leq M$.

Alors, $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ converge.

Preuve :

Soit $[u, v[\subset [a, b[$, en utilisant la deuxième formule de la moyenne, on a : $\exists c \in [u, v]$, $\int_u^v f(t)g(t\,dt = f(u^+)\int_u^c g(t)\,dt$

ainsi, $|\int_u^v f(t)g(t)\,dt| \leq |f(u^+)|\int_u^c |g(t)|\,dt \leq 2M|f(u^+)|$

Soit $\varepsilon > 0$, pour u assez grand, on a :

$|\int_u^v f(t)g(t)\,dt| \leq \varepsilon$. le resultat désiré en utilisant le critère de Cauchy.

Exemples 4.3. *$\forall \alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha}\,dt$ sont convergentes.*

En effet :

1. *$f(x) = \frac{1}{t^\alpha}$ positive, décroissante et $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha} = 0$*
2. *$\forall x, y \in [1, +\infty$: $|\int_x^y \sin(t)\,dt| = |\cos x - \cos y| \leq 2$.*

Le critère d'Abel permet de conclure.

CHAPITRE 3

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1 Introduction

La détermination de l'évolution de nombreux phénomènes de la physique ou de la nature conduit à des équations réliant une fonction inconnue y et certains de ses dérivées y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$.

De telles relations sont appelées **équations différentielles**.

Exemples 1.1.

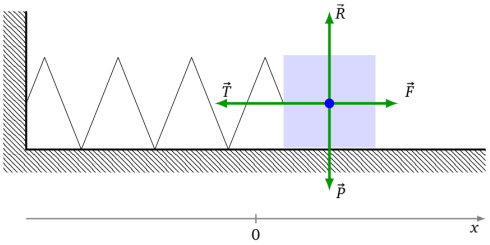
1) ***Equation de Newton***

$m\frac{d^2M(t)}{dt^2} = \overrightarrow{F}$.

1) ***Equation de la chute libre.***

$y''(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g$

3) ***Masse attachée à un ressort***



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

Résoudre une équation différentielle $F(y', y'', \ldots, y^{(n)}; x) = 0$ sur un intervalle I c'est trouver les solutions $x \to y(x)$ définies et dérivables sur I, vérifiant : $\forall x \in I : F(y', y'', \ldots, y^{(n)}; x) = 0$. Les courbes représentatives des fonctions solutions s'appellent les courbes intégrales de l'équation.

2 Equations différentielles linéaires du premiers ordre.

Définition 2.1

On appelle équation différentielle du premier ordre, une équation de type :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' = b(x)$$

ou : $a_0(x)$, $a_1(x)\, et\, b(x)$ sont des fonctions, a_0 n'étant pas la fonction nulle, I étant l'intervalle sur lequel $a_0(x)$, $a_0(x)\, et\, b(x)$ sont définies.

Une fonction f est solution de cette équation sur I lorsque f est définie et dérivable sur I et : $\forall x \in I : a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) = b(x)$.

Exemples 2.1. 1. *L'équation* $y' + xy = 0$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre. la fonction* $x \to \exp(-\frac{x^2}{2})$ *est une solution sur* $\mathbb{R}$.

2. $y' + xy = e^x$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre*
3. $y' + xy = 0$ *est l'équation différentielle sans second membre associée à la précédente*
4. $y'^4 - y = x$ *ou* $y'' \cdot y' - y = 0$ ***ne sont pas*** *des équations différentielles linéaires*

Proposition 2.1

1)- L'ensemble des solutions sur un intervalle I de l'équation différentielle du premier ordre homogène (H) : $a_0(x)y + a_1(x)y' = 0$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-ev.

2)- Si l'équation différentielle linéaire du prmier ordre (E) : $a_0(x)y + a_1(x)y' = b(x)$ admet une solution f_0 sur I, alors les solution sur I de (E) sont exactement les fonctions $f = f_0 + \phi$; avec ϕ décrivant le $\mathbb{K}$-ev des solutions de (H).

Preuve :

1)- Notons H l'ensemble des solutions de (H). Soient f, $g \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in I$

$$\begin{cases} a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) = 0, \\ a_0(x)\lambda g(x) + a_1(x)\lambda g'(x) = 0, \end{cases}$$

$\forall x \in I : a_0(x)\big(f(x) + \lambda g(x)\big) + a_1(x)\big(f'(x) + \lambda g'(x)\big) = 0,$

donc : $f + \lambda g \in H$.

2)- Supposons que (E) admette une solution f_0 sur I. Soit f une solution de (E)

$\forall x \in I : a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) = a_0(x)f_0(x) + a_1(x)f_0'(x)$

$\Rightarrow \forall x \in I : a_0(x)\big(f(x) - f_0(x)\big) + a_1(x)\big(f'(x) - f_0'(x)\big) = 0$, i.e. $\phi = f - f_0 \in H$.

Réciproquement : Soit $\phi \in H$,

on a : $\forall x \in I : a_0(x)\phi(x) + a_1(x)\phi'(x) = 0$ et $a_0(x)f_0(x) + a_1(x)f_0'(x) = b(x)$

$\Rightarrow \forall x \in I : a_0(x)\big(f_0(x) + \phi'(x)\big) + a_1(x)\big(f_0(x) + \phi(x)\big) = b(x),$

$\Rightarrow f_0 + \phi$ solution de (E).

2.1 Equations différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur un intervalle

Théorème 2.1

Soit (H) : $a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) = 0$ équation différentielle linéaire du premier ordre homogène, et I un intervalle sur lequelle a_0, eta_1 continues et a_0 ne s'annule pas. Notons G une primitive quelconque sur I de $x \to -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$.

1)- Les solutions sur I de (H) sont : $x \to \lambda \exp(G(x))$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

2)- Si une solutions de (H) sur I s'annule en un point, elle est nulle.

3)- Le $\mathbb{K}$-ev des solutions de (H) sur I est de dimension 1, toute solution non nulle de (H) en constitue une base.

Preuve :

1)- Soit (H) : $a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) = 0$, on suppose que I est un intervelle sur lequel a_0, eta_1 continues et a_0 ne s'annule pas.

$y' = \omega(x)y$ avec $\omega : x \in I \to \omega(x) = -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}\mathbb{K}$.

Soit G une primitive de ω sur I. On a : $\big(\exp(G(x))\big)' = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\exp(G(x)) = \omega(x)\exp(G(x))$.

Donc : $x \to \exp(G(x))$ est une solution de (H) sur I.

Cherchons d'autres solutions de (H) sur I. Soit ϕ une fonction dérivable sur I, telle que : $\phi(x) = k(x)\exp(G(x))\ \forall x \in I$, avec k dérivable sur I.

Alors : $\forall x \in I$, $\phi'(x) = k'(x)\exp(G(x)) + k(x)\omega(x)\exp(G(x))$,

ϕ solution de (H) $\Leftrightarrow \phi'(x) = \omega(x)\phi(x)$

donc : $\forall x \in I : \omega(x)k(x)\exp(G(x)) = k'(x)\exp(G(x)) + k(x)\omega(x)\exp(G(x))$

$\Leftrightarrow \forall x \in I : k'(x)\exp(G(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I : k'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I(intervalle) : k(x) = cte = \lambda$.

D'ou : ϕ une solution de (H) : $\forall x \in I : \phi(x) = \lambda\exp(G(x))$.

2)- Si $\exists x_0 \in I : \phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda\exp(G(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Cas particulier : Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si

$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

2.2 Recherche d'une solution particulière :

Soit (E) : $a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) = b(x)$ une équation différentielle du premier ordre avec second membre $b(x)$.

2.2.1 Méthode de la variation de la constante :

Soit (H) : $a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) = 0$ l'équation homogène et ϕ une solution non nulle de (H). Cherchons une solution f de (E) sous la forme $f = \lambda\phi$ oú λ une fonction dérivable :

$$\begin{aligned} f = \lambda\phi \text{ vérifie } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in I;\ a_1(x)\big(\lambda'(x)\phi(x) + \lambda(x)\phi'(x)\big) + a_0(x)\lambda(x)\phi(x) = b(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I;\ a_1(x)\lambda'(x)\phi(x) + \lambda(x)\big(\phi'(x) + a_0(x)\phi(x)\big) = b(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I;\ a_1(x)\lambda'(x)\phi(x) = b(x) \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ est une primitive de } x \to \frac{b(x)}{a_1(x)\phi(x)} \text{ sur } I \end{aligned}$$

Remarque :

1. **Cas particulier** : Si on connaît une solution particulière de l'équation E ou on remarque une solution évidente alors la solution s'obtient en ajoutant la solution particulière de E à la solution générale de l'équation sans second membre $E_s sm$.
2. **Cas général** : Si on connaît pas une solution particulière de l'équation E, on utilise **la méthode de variation de la constante** qui permet de déterminer une solution particulière dans tous les cas.

Exemples 2.2 ($y' - \frac{y}{x} = x^3$ sur $\mathbb{R}^{+*}$).

On résout l'équation sans second membre $y'_g - \frac{y_g}{x} = 0$ *d'où* $y'_g = \frac{y_g}{x}$ *alors* $a(x) = \frac{1}{x}$.

On obtient $y_g = Ke^{\int \frac{1}{x}dx}$

d'où $y_g = Kx$ *avec* $K \in \mathbb{R}$

Recherchons $y_p = K(x)x$ $y'_p = k'(x)x + k(x)$ *d'où* $y'_p - \frac{y_p}{x} = k'(x)x + k(x) - k(x) = x^3$

$k'(x) = x^2$ *alors* $k(x) = \frac{x^3}{3}$ *donc* $y_p = \frac{x^4}{3}$

Or $y = y_g + y_p$ *alors* $y = Kx + \frac{x^4}{3}$

Exemples 2.3.

Soit (H) : $(1+x^2)y' + 3xy = 0$. *On a* $x \to 3x$ *et* $x \to 1+x^2$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$ *et* $1+x^2 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Donc les solutions de (H) sont de la forme : $y(x) = \lambda \exp(G(x))$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$, $G(x)$ *est une primitive de* $x \to \frac{-3x}{1+x^2}$ *sur* $\mathbb{R}$. *On a*

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{-3x}{1+x^2}dx \\ &= -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= -\frac{3}{2}\ln(1+x^2) + cte. \end{aligned}$$

D'où : $y(x) = \lambda(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples 2.4.

Soit (H) : $xy' = y + xy$. *On a* $x \to 1+x$ *et* $x \to x$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$ *et* $1+x^2 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Donc les solutions de (H) sont de la forme : $\forall x \in]0, +\infty[$ *:* $y(x) = \lambda \exp(G(x))$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$, $G(x)$ *est une primitive de* $x \to \frac{1+x}{x}$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$. *On a*

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{1+x}{x}dx \\ &= \ln(x) + x + cte. \end{aligned}$$

et $\forall x \in]-\infty, 0[$ *:* $y(x) = \lambda \exp(G(x))$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$, $G(x)$ *est une primitive de* $x \to \frac{1+x}{x}$ *sur* $\mathbb{R}^{-*}$.

On a

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{1+x}{x} dx \\ &= \ln(-x) + x + cte. \end{aligned}$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^* : y(x) = \lambda \exp(\ln(|x|) + x) = Kx\exp(x)$ *avec* $K \in \mathbb{R}$.

Exemples 2.5.

Soit (H) : $y' \sin(x) = y$. *On a* $x \to \sin(x)$ *étant continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $\sin(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc les solutions de (H) sont de la forme : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus k\pi : y(x) = \lambda \exp(G(x))$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$, $G(x)$ *est une primitive de* $x \to \dfrac{1}{\sin(x)}$ *sur* $\mathbb{R} \setminus k\pi$. *On a*

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{1}{\sin(x)} dx \\ &= \int \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)} dx \end{aligned}$$

.

On pose $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{1}{u^2-1} du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u-1} + \frac{du}{u+1} \\ . &= \frac{1}{2} \ln(\frac{u-1}{u+1}) + cte. \end{aligned}$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus k\pi : y(x) = \lambda \dfrac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.3 Quelques classes des équations différentielles

2.3.1 Equations différentielles à variables séparées

Définition 2.2

Une équation différentielle de premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$y'b(y) = a(x)$$

où a est une fonction définie sur un intervalle I et b est une fonction définie sur un intervalle J.

Résolution :

1. On pose $y' = \frac{dy}{dx}$ alors l'équation s'écrit sous la forme : $b(y).dy = a(x).dx$ ce qui explique la terminologie variables séparées.
2. Soit B (resp.A) est une primitive de b(resp.a) sur J (resp. I)
3. y est une solution sur I ssi $B(y) = A(x) + K$ où K est une constante quelconque.
4. si B est inversible alors $y = B^{-1}(A(x) + K)$

Exemples 2.6 $((1+x^2)^2y' + 2x + 2xy^2 = 0)$**.**

On a $(1+x^2)^2y' = -2x(1+y^2)$ *donc* $\frac{y'}{1+y^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$,
or y' *est la dérivée par rapport à* x *donc* $y' = \frac{dy}{dx}$.
On obtient $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{-2xdx}{(1+x^2)^2}$.
D'où $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{-2xdx}{(1+x^2)^2}$.
Donc $\arctan(y) = \frac{1}{1+x^2} + K$.
On déduit $y = \tan(\frac{1}{1+x^2} + K)$.

2.3.2 Equations homogènes :

Ce sont des équations du genre : $y' = f(\frac{y}{x})$.

Exemples 2.7.

Soit (E) : $2x^2y' - y^2 = 4xy$,

On a : $x \to 2x^2$ *est continue et non nulle sur* $\mathbb{R}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ *:* $y' = \dfrac{y^2+4xy}{2x^2} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x^2}) + 2(\dfrac{y}{x})$.

Il s'agit d'une équation homogène, on pose $u = \dfrac{y}{x}$

$$\begin{aligned} u = \frac{y}{x} &\Leftrightarrow y = ux \\ &\Leftrightarrow y' = u + xu' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* : (E) &\Leftrightarrow u + xu' = \frac{1}{2}u^2 + 2u \\ &\Leftrightarrow xu' = \frac{1}{2}u^2 + u \\ &\Leftrightarrow 2xu' = u(u+2) \\ &\Leftrightarrow \frac{2du}{u(u+2)} = \frac{dx}{x}, \text{ (séparation des variables)} \\ &\Leftrightarrow \int \frac{du}{u} - \frac{du}{u+2} = \int \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

D'ou : $u = \dfrac{2kx}{1-kx}$, *avec* $k \in \mathbb{R}$ *Finalement :* $y = \dfrac{2kx^2}{1-kx}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{1}{k}\}$.

2.3.3 Equation de BERNOULLI

Ce sont des équations du genre : (E) : $y' = a(x)y + b(x)y^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exemples 2.8.

Soit (E) : $y' = y + x^2y^2$,

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 1 + x^2y \\ &\Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = x^2 \end{aligned}$$

On pose : $u = \frac{1}{y}$ *(en générale* $u = \frac{1}{y^{n-1}}$*).*

$$(E) \Leftrightarrow -u' - u = x^2$$

$$\Leftrightarrow u' + u = -x^2 \text{ équation diff linéaire du premier ordre à coéfficients constants}$$

Résolution de l'équation : $u' + u = -x^2$.

ESSM (H) : $u' + u = 0$, *les solutions sont :* $u(x) = \lambda \exp(-x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

EASM : $u' + u = -x^2$ *cherchons une solution particulière par ma méthode de variation de constante, pour cela, on cherche une solution de la forme :* $u_p(x) = \lambda(x)\exp(-x)$.

$$u_p'(x) + u_p(x) = -x^2 \Leftrightarrow \lambda'(x)\exp(-x) - \lambda(x)\exp(-x) + \lambda(x)\exp(-x) = -x^2$$

$$\Rightarrow \lambda'(x) = -x^2\exp(x),$$

donc $\lambda(x) = \int -x^2\exp(x)dx = (-x^2 + 2x - 2)\exp(x)$, *ainsi* $u_p(x) = (-x^2 + 2x - 2)$ *et la solution générale est :* $u_g = u_p + u_h = (-x^2 + 2x - 2) + \lambda\exp(-x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
finallement : $y_g = \dfrac{1}{(-x^2 + 2x - 2) + \lambda\exp(-x)}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.3.4 Equation de RICCATTI

Ce sont des équations de type : $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$.

On a besoin de chercher une solution particulière y_1 et on pose : $u = y - y_1$.

Exercices :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(4x^2 + 3xy + y^2) + 4(y^2 + 3xy + x^2)y' = 0$,
2. $y^3y' + 3xy^2 + 2x^3 = 0$,
3. $2x + y - (4x - y)y' = 0$,
4. $xyy' - y^2 = (x + y)\exp(\frac{-y}{x})$,
5. $y' = y + y^3$,
6. $y' - y = \sqrt{y}$.

3 Equations différentielles de 2nd ordre à coéfficients constant

Définition 3.1

Une équation différentielle du **second ordre à coefficients constants** est une équation de la forme :

$$ay'' + b.y' + c.y = f(x) \qquad \text{(E)}$$

où a , b et c sont des constantes et $f(x)$ est une fonction donnée définie et continue sur un intervalle I. **L'équation sans second membre** associée à (E) est :

$$ay'' + b.y' + c.y = 0 \qquad (E_{ssm})$$

L'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre (E_{ssm}) est

$$ar^2 + b.r + c = 0 \qquad \text{(a)}$$

son $\Delta = b^2 - 4ac$

3.1 Résolution de l'équation sans second membre

Résolution de l'équation sans second membre :

— Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique (a) admet deux racines réelles r_1 et r_2 .

Dans ce cas la solution générale de (E_{ssm}) est : $y_{ssm} = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

— Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique (a) admet une racine réelle double r.

Dans ce cas la solution générale de (E_{ssm}) est : $y_{ssm} = Ae^{rx} + Bxe^{rx}$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

— Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique (a) admet deux racines complexes $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.

Dans ce cas la solution générale de (E_{ssm}) est : $y_{ssm} = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x)$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Exemples 3.1. *Résoudre :*

1. $y''-5y'+6y=0$, *L'équation caractéristique* $r^2-5r+6=0$ *admet deux solutions distinctes :* 2 *et* 3.
   $y=Ae^{2x}+Be^{3x}$ *où* $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
2. $y''-4y'+4y=0$, *L'équation caractéristique* $r^2-4r+4=0$ *admet une solution double :* 2. *Donc*
   $y=(Ax+B)e^{2x}$ *avec*$(A,B)\in\mathbb{R}^2$
3. $y''+3^2y=0$, *L'équation caractéristique* $r^2+3^2=0$ *admet deux solutions complexes non réelles :* $3i$ *et* $-3i$. *Donc* $y=A\cos(3x)+B\sin(3x)$ $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

3.2 Résolution de l'équation avec second membre

Résolution de l'équation avec second membre :

La solution de l'équation avec un second membre est la somme de :

la solution particulière de E et la solution générale de l'équation sans second membre (E_{ssm}).

Pour obtenir la solution particulière, on choisit l'une des deux méthodes selon la forme de $f(x)$.

— la première est appliquée si $f(x)$ a l'un des formes classiques suivantes :

1. $f(x)=e^{\lambda x}P(x)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$ et $P(x)$ est un polynôme.
2. $f(x)=P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme c'est le cas précédant avec $\lambda=0$.
3. $f(x)=e^{\alpha x}P(x)\cos(\beta x)$ ou $f(x)=e^{\alpha x}P(x)\sin(\beta x)$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $P(x)$ est un polynôme.

— Sinon on utilise la méthode de la variation de la constante avec la condition de Lagrange.

Théorème 3.1: principe de superposition

Soit l'équation $ay"+by'+cy=f(x)$ et soit $f(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$. Si pour chaque $k\in\{1,\cdots,n\}$, y_k est une solution particulière de l'équation $ay''+b.y'+.cy=f_k(x)$ alors $y_p=\sum_{k=1}^{n}y_k(x)$ est une solution particulière de E

Proposition 3.1: $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$ **où** P **est un polynôme et** $\lambda \in \mathbb{R}$

La solution particulière de (E) est sous la forme :

1) $Q(x)e^{\lambda x}$si λ n'est pas une racine de (a)

2) $xQ(x)e^{\lambda x}$ si λ est une racine simple de (a)

3) $x^2Q(x)e^{\lambda x}$ si λ est une racine double de (a).

où $Q(x)$ est un polynôme de même degré que P.

Exemples 3.2 $(y'' - 4y' + 4y = \left(x^2 + 1\right)\exp(x)\ )$**.**

L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ *admet une solution double : 2*

La solution générale de l'équation sans second membre est alors $y_{ssm} = (Ax + B)e^{2x}$

$\lambda = 1$ *n'est pas solution de* $r^2 - 4r + 4 = 0$*, une solution particulière de notée* y_p *sera de la forme*

$y_p = Q\left(x\right)e^x$

On pose $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$*,* α, β, γ *réels à déterminer.*

On a $(\alpha x^2 + (\beta - 4\alpha)\, x + (\gamma - 2\beta + 2\alpha))e^x = \left(x^2 + 1\right)e^x$

$\alpha = 1$*,* $\beta - 4\alpha = 0$ *et* $\gamma - 2\beta + 2\alpha = 1$ *donc* $\alpha = 1$*,* $\beta = 4$ *et* $\gamma = 7$

$y_p\left(x\right) = \left(x^2 + 4x + 7\right)e^x$ *est une solution particulière.*

Proposition 3.2: $f(x) = P(x)$

La solution particulière de (E) est un cas particulière de la proposition précédente avec $\lambda = 0$, elle est sous la forme :

1) $Q(x)$si 0 n'est pas une racine de (a)

2) $xQ(x)$ si 0 est une racine simple de (a)

3) $x^2Q(x)$ si 0 est une racine double de (a).

où $Q(x)$ est un polynôme de même degré que P.

Exemples 3.3 $(y'' - 5y' + 6y = x^2 + x + 1\ )$**.**

D'après les exemples précédents, l'équation caractéristique n'admet pas 0 *comme solution alors*

La solution particulière $Q(x)$ *est un polynôme de même degré que* P *c à d* 2, *donc,* $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$.

On a : $Q'(x) = 2Ax + B$ *et* $Q''(x) = 2A$.

On substitue y par Q dans E, on a $Q'' - 5Q' + 6Q = x^2 + x + 1$.

Donc : $2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x + 1 \quad 6Ax^2 + (6B - 10A)x + 2A - 5B + C = x^2 + x + 1$

alors : $6A = 1, 6B - 10A = 1$ *et* $2A - 5B + C = 1$

Alors : $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1 + \frac{10}{6}}{6} = \frac{4}{9}$ *et* $6C = 1 - \frac{2}{6} + \frac{5 * 4}{9} = \frac{14}{9}$ *alors* $C = \frac{14}{54}$.

D'après les exemples précédents $y_{ssm} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

On déduit que $y = y_{ssm} + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x^2}{6} + \frac{4x}{9} + \frac{14}{54}$

Proposition 3.3: $f(x) = e^{\lambda x}$

La solution particulière de (E) est un cas particulière de la proposition précédante avec $P(x) = 1$ donc $Q(x) = cte$, elle est sous la forme :

1) $Ce^{\lambda x}$si λ n'est pas une racine de (a)

2) $Cxe^{\lambda x}$ si λ est une racine simple de (a)

3) $Cx^2 e^{\lambda x}$ si λ est une racine double de (a).

(a) L'équation caractéristique de l'équation différentielle sans second membre.

Exemples 3.4 $(y'' - 5y' + 6y = e^{5x})$**.**

5 *n'est pas une solution de l'équation caractéristique* $r^2 - 5r + 6 = 0$ *et* $deg(Q) = deg(P) = 0$

alors $Q(x) = C$.

Alors : $y_p = Ce^{5x}$ *donc* $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + Ce^{5x}$.

On a : $y_p' = 5Ce^{5x}$ *et* $y_p'' = 25Ce^{5x}$.

$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = 25Ce^{5x} - 5 * 5Ce^{5x} + 6Ce^{5x} = {}^{5x}$.

alors : $6C = 1$ *donc* $C = \frac{1}{6}$.

$y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6}e^{5x}$.

Dans tous les cas précédants, on doit déterminer la constante C en remplaçant y_p dans l'équation avec un second membre.

Proposition 3.4: $f(x) = e^{\alpha x}P(x)\cos(\beta x)$ **ou** $f(x) = e^{\alpha x}P(x)\sin(\beta x)$

On cherche une solution particulière sous la forme :

- $y_p = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique.
- $y_p = e^{\alpha x}(xP_1(x)\cos(\beta x) + xP_2(x)\sin(\beta x))$ si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique.

$P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des polynômes de même degré que P.

Exemples 3.5 ($y'' + 25y = \sin(5x)$ ou $y'' + 25y = \cos(5x)$).

L'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre est $r^2 + 25 = 0$, *les solutions complexes sont de la forme* $\pm 5i$.

La solution générale de l'équation sans second membre est $y_{ssm} = C_1\cos(5x) + C_2\sin(5x)$. *Pour le second membre* $\alpha = 0 et\ \beta = 5$

et $5i$ *est racine de l'équation caractéristique, alors* $y_p = (C_1 x\cos(5x) + C_2 x\sin(5x))$ *car* $degP = 0$ *donc* P_1 *et* P_2 *sont des constantes.*

On résout l'équation $y_p'' + 25y_p = \sin(5x)$, *et* $y_p'' + 25y_p = \cos(5x)$ *et on obtient* C_1 *et* C_2

BIBLIOGRAPHIE

[1] Mohammed El Amrani, *Intégrale de Riemann Théorie et pratique avec exercices corrigés*, Isbn 978 -27056 -6924 9 © 2009, Hermann éditeurs, 6 rue de la Sorbonne 75005 Paris.

[2] Cours de mathématiques première année,*EXO7 Version 1.00 – Janvier 2016*

[3] Stéphan Balac, Fédéric stum *Algèbre et analyse, cours de mathématiques première année*; Press polytechniques et université Romandes.